CEMAL YILDIRIM

Matematiksel Düşünme

Remzi Kitabevi

MATEMATİKSEL DÜŞÜNME / Cemal Yıldırım

Kapak görseli: Teerawit Janpeng, 123rf

ISBN 978-975-14-1913-2

BİRİNCİ BASIM: Ocak 1988
ON BEŞİNCİ BASIM: Ağustos 2019

Remzi Kitabevi A.Ş., Akmerkez E3-14, 34337 Etiler-İstanbul
Sertifika no: 10705
Tel (212) 282 2080 Faks (212) 282 2090
www.remzi.com.tr post@remzi.com.tr

Baskı: Seçil Ofset, 100. Yıl Mah., Matbaacılar Sitesi
4. Cad. No: 77 Bağcılar-İstanbul
Sertifika no: 12068 / Tel (212) 629 0615

Cilt: Çifçi Mücellit, 100. Yıl Mah., Matbaacılar Sitesi
5. Cad. No: 24-25 Bağcılar-İstanbul
Tel (212) 629 4783

Birinci Basım İçin Önsöz

Bu kitap okuyucuyu matematiği öğrenmeye değil, matematiksel düşünmeyi tartışarak anlamaya çağırmaktadır.

Okuyucunun öyle bir etkinliğe girmesi için orta öğrenim yıllarında öğrendiği matematik yeterlidir. Felsefi nitelikte bir tartışma ilişkin olduğu alanın bilgisini gerektirir, kuşkusuz; ama anlamlı bir yaşam deneyimiyle birleşen entelektüel ilgi bu amaç için çok daha önemlidir.

Matematik teknik görünümüyle pek çok kimseyi ürküten bir konudur. Oysa soyut formüllerin gerisinde daha düzenli ve kesin biçimiyle, alışık olduğumuz günlük düşünce vardır. Başka bir deyişle, matematikte bize yabancı gelen düşüncenin kendisi değil, düşünceyi dile getiren kimi özel simgelerdir. Gerçi günlük düşünme daha çok somut nesne ve olgulara yönelik bir etkinliktir. Matematiksel düşünmenin özelliği ise somut olgusal ilişkileri bile soyut terimlerle dile getirebilme, genele açılabilme gücünde kendini göstermektedir. Ne var ki, temelde ikisi de aynı mantığa bağlıdır. İkisinde de ulaşılan sonuçları elden geldiğince sağlam ve doyurucu öncüllere dayama sorumluluğu vardır.

Matematiksel Düşünme daha önce yayımlanan *Bilim Felsefesi* yapıtıma koşut bir çalışmadır; altı yıllık bir uğraşın ürünüdür. Kitabın önemli bir bölümünü 1983-1985 yıllarında misafir öğretim üyesi olarak bulunduğum California State University, Northridge'de katıldığım bir seminerde işlediğim konular oluşturmaktadır. Seminer çalışmalarını benimle paylaşan, tartışmalarından geniş ölçüde yararlandığım meslektaş ve öğrencilerime şükran borcumu dile getirmek isterim.

Kitabın sonunda yer alan on çeviri metin, hem asıl metinde yer alan tartışmayı zenginleştirmek, hem de, sorunsal noktalara ışık tutmak amacıyla seçilmiştir. Yetkili kalemlerin ürünü olan bu metinlerin üniversitelerimizde felsefe seminer çalışmaları için de aranılan bir kaynak oluşturacağı umulur.

Matematik felsefesi Batı kültür dünyasında son yüzyıl içinde yoğun biçimde işlenen bir düşün alanı olmuştur. Dilimizde henüz bu alanda ne telif, ne de çeviri bir yayına rastlamamaktayız. Elinizdeki kitap bu boşluğu doldurma yolunda bir ilk denemedir; yeni yayınlara yol açarsa, yazar emeğini yeterince değerlendirilmiş sayacaktır.

Cemal Yıldırım
İda Tepe, Akçay, Nisan 1988

İkinci Basım İçin Önsöz

Matematiksel Düşünme'nin yeni bir basım olanağı bulmasını, düşün alanına ilginin olumlu bir göstergesi sayıyor, kıvanç duyuyorum. Yayınevi, bu türden bir yapıtın yeterli sayıda okyucu bulamayacağı riskini göze alarak, salt düşün yaşamımıza hizmet sorumluluğuyla, ilk basımı üstlenmişti. Bu kez öyle bir riskin duyulmaması gerçekten sevindirici bir gelişmedir.

Kitabım ikinci basıma, kimi düzeltme ve genişletmeler dışında EKLER bölümüne konan iki yeni çeviri metinle girmektedir. Okuyucuların bu çalışmalarla kitabı daha doyurucu bulacaklarını umuyorum.

Cemal Yıldırım
İda Tepe, Akçay, Ocak, 1996

İçindekiler

V. BÖLÜM

Matematiksel Nesneler

VI. BÖLÜM

Matematiksel Kesinlik

VII. BÖLÜM

Matematikte Bunalımlar

VIII. BÖLÜM

Matematiğin Temellerine İlişkin Felsefi Görüşler

IX. BÖLÜM

Aksiyomatik Yöntem

I. BÖLÜM

Giriş

Matematik Nedir?

Matematiğin değerini bilmeyen ya da yadsıyan kişilerin sayısı hiçbir dönemde fazla olmamıştır. Bilim ve ona dayalı teknolojinin giderek artan ölçülerde etkilediği, hatta biçimlediği çağdaş yaşamda ise matematiğin değeri tartışılmaz bir konudur. En azından sayma, toplama ve çarpma gibi temel hesaplama işlemlerini bilmeksizin kişinin herhangi bir toplumda etkili bir yaşam sürdürmesi düşünülebilir mi?

Ne var ki, önemi hemen herkesçe bilinen matematiğin ne olduğu sorusu dün olduğu gibi bugün de açıklığa kavuşturulmuş bir soru değildir. Antik Yunan'dan günümüze değin düşünürleri uğraştıran bir soruya, çoğu kez birbirine ters düşen yanıtlar verilmiştir. Ama bunlardan hiçbirinin tümüyle doyurucu olduğu söylenemez. Matematikçilerin bile bu konuda yeterince açıklık içinde olduklarını söylemek güç. Üstelik, "matematik nedir?" sorusu sadece kuramsal düzeyde kalan bir soru da değildir. Günlük yaşam işlevlerinin vazgeçilmez aracı olan matematik, kuramsal ilgi yanında pratik ilgilerimiz açısından da üzerinde durulmaya değer bir konudur. Çalışmamızın amacı, bu soruyu irdeleyerek matematiksel düşünmeyi tanıtmak, bu tür düşünmeyi niteleyen kavram ve yöntemleri, gelişme bağlamları ve bilimsel ilişkileri içinde ortaya koymaktır.

Matematik çok yönlü bir konudur; yaklaşımımız temelde mantıksal, ama bir ölçüde de tarihsel olacaktır. Yeri geldikçe matematiğin kültürel ilişkilerine değinecek, hatta kavram ve ilkelerinin oluşmasında yaratıcı imge, sezgi gibi öznel düşünce etkinliklerinin rolünü yoklayacağız. Konu bu yönüyle, kuşkusuz, mantıksal olmaktan çok psikolojiktir. Tarih boyunca matematiksel düşüncede yer alan dönüşümlere baktığımızda çok yönlü bir açıklama gereğini hemen görmekteyiz. Salt mantık ya da felsefe çerçevesinde kalan çözümlemelerle konuya hiçbir aşamasında yeterli ışığın tutulabileceğini bekleyemeyiz. Kaldı ki, matematik kökleri geçmişin derinliklerine uzanan bir gelişmedir: Eski Mısır ve Babil'den günümüze ulaşan, giderek daha soyut ve karmaşık nitelik kazanan bir gelişme!

Her dönemde ve tüm uygarlıklarda yaşamı bütünleyen sanat, bilim, endüstri, tarım ve diğer günlük geçim uğraşlarının etkili aracını sağlayan matematiği, aynı zamanda, kendine özgü amaç, yöntem ve sonuçlarıyla entelektüel değeri yüksek bir disiplin olarak algılamaya çalışacağız. Başka bir deyişle, matematiğe iki değişik açıdan bakılabilir: (1) araç olarak, (2) amaç olarak. Bilimi de kapsayan tüm uygulama alanlarında matematik bir anlatım ve çıkarsama aracıdır. Matematikçinin gözünde ise, matematik bir araç değil, bir amaçtır; değerini kendi içinde taşıyan, katıksız bilme ilgimizin ürünü, bir düşünme ve doğruyu arama uğraşıdır.

Çalışmamızın özünü matematiğin anlam, yöntem ve gelişim sorunları oluşturmaktadır. Öte yandan, matematiğin özellikle doğa bilimleriyle ilişkisine bakarak, araç kimliğini belirtmekten de geri kalmayacağız. Ancak ayrıntılara girmeden önce, konuya toplu bir bakışın yararlı olacağını sanıyoruz.

Sorumuza dönelim: Matematik nedir?

Her şeyden önce, üstünkörü de olsa, bu soruyu yanıtlamalıyız. Hemen belirtmeli ki, sürekli çabalara karşın, bu soruya yetkili kafaların üzerinde birleştiği bir yanıt henüz verilememiştir. Körlerin dokunarak tanılamaya çalıştıkları fil gibi: Matematik, kimisine göre kuralları belli satranç türünden bir zekâ oyunu; kimisine göre sayı türünden soyut nesneleri konu alan bir bilim; kimisine göre bilim ve pratik yaşam için yararlı bir hesaplama tekniği. Matematikçilerin gözünde ise matematik bizi doğruya, kesin bilgiye götüren biricik düşünme yöntemi. Matematiği "bilimlerin kraliçesi" sayanlar yanında, hizmetinde görenler de var. Hatta onu ne olduğu, neyle uğraştığı belli olmayan, salt bir zihinsel çıkarım ya da dönüştürme işlemi diye niteleyen, ya da karmaşık kavramsal bir labirente benzeten saygın filozoflara rastlamaktayız.

Görülüyor ki, hazır verilmiş bir tanımdan yola çıkarak matematiği anlamaya kalkmak, birbiriyle bağdaşmaz değişik nitelemelerden birine kapılmaktan ileri geçmeyecek. Bunun yerine bizi tanım oluşturmaya götürecek şu üç temel soruyu yanıtlama daha yararlı olabilir:

(1) Matematiğin konusu nedir?
(2) Matematiksel düşünme yöntemini nasıl niteleyebiliriz?
(3) Matematikte ulaşılan sonuçların özelliği nedir?

Çalışmamızda nirengi noktaları olarak aldığımız bu sorulara şimdilik genel nitelikte, kısa yanıtlar vermekle yetineceğiz; ayrıntılı irdelemeyi ileriki bölümlere bırakıyoruz.

Matematiğin konusunu, kısaca söylemek gerekirse, sayı, nokta, küme gibi soyut nesneler ve bu tür nesneler arasındaki ilişkiler oluşturmaktadır.(1) Matematikçi bu nesnelerin özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri ortaya çıkarma, genelleme ve ulaştığı sonuçları ispatlama çabası içindedir. Örneğin tek sayılara ilişkin şu özelliği alalım:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1^2 \\ 1+3 & = & 2^2 \\ 1+3+5 & = & 3^2 \\ 1+3+5+7 & = & 4^2 \\ . & & . \end{array}$$

(1) Ünlü 18. yüzyıl *Encyclopédie Methodique* matematiği, "Büyüklüklerin sayılabilir veya ölçülebilir özelliklerini konu alan bilim" diye tanımlamıştı. Kimi ders kitaplarında matematiğin bugün bile nicelik ya da düpedüz sayı bilimi diye tanımlandığını görmekteyiz. Ancak bu tanım yetersizdir: Sayı ile ilişkisi olmayan, ölçme ve koordinatlara dayanmayan projektif ve betimsel geometriler bu tanımın dar çerçevesi dışında kalmaktadır.

. .

Böyle bir "gözlem" matematikçiyi genel bir ilişkinin varlığı hipotezine götürür. Nitekim örneğimizdeki ilişkinin matematikte şöyle bir genelleme biçiminde dile getirildiğini görmekteyiz: 1'den başlayarak n sayıda tek sayının toplamı n2'ye eşittir.

Şimdi matematikçi bu genellemenin doğruluğunu, gözlemlediği ilişkiyi daha fazla tek sayılar üzerinde yoklayarak değil, ispatlayarak, yani genellemeyi doğru sayılan birtakım öncüllerden çıkarsayarak saptamaya çalışır.

Kuşkusuz bir tek örneğe dayanarak genel bir yargıda bulunmak çeşitli yönlerden sakıncalıdır.(1) Ancak bir ilk niteleme olarak şöyle diyebiliriz: Matematik, örneğimizdeki türden ilişkileri bulma ve ispatlama çalışmasıdır. Bu nitelemede, kalın çizgilerle de olsa, matematiğin iki aşamalı yöntemini bulmaktayız: İlk aşama, bir özellik ya da ilişkiyi bulma, ortaya çıkarma çabasını; ikinci aşama bulunan, ortaya konan ilişkiyi ispatlama sürecini içermektedir. Bir ilişkiyi bulma ya da sezinleme daha çok yaratıcı imge, sezgi ve deneyim gerektiren psikolojik bir olaydır; ispatlama ise, kural ve ölçütleri belli "mantıksal yargılama" diyebileceğimiz bir akıl yürütmedir. Buna göre matematiği, sayı, nokta, küme, fonksiyon türünden soyut nesnelere özgü özellikleri ortaya çıkarma, belirleme ve mantıksal olarak kanıtlama (ispatlama) bilimi diye tanımlayabiliriz.

Çalışmamız boyunca göz önünde tutacağımız bu tanım çeşitli yönlerden işlenmeye ve açıklanmaya muhtaçtır. Ancak öncelikle doğa bilimleriyle bir karşılaştırma yararlı olacaktır.

---

(1) Kuşkusuz matematikte "değişmez bağıntılar" (invariant relations) denilen ilişkilere pek çok örnek gösterilebilir. Geometrik şekillere ilişkin şu üç bağıntı ortaokul öğrencilerinin bildiği örnekler arasındadır:

(1) Euler formülü: Bir şeklin köşeleri K, yüzeyleri Y, ayrıtları A ile gösterilirse, bunlar arasında daima K+Y=A+2 denklemi ile dile gelen bir bağıntı vardır.

(2) Düzlem şekillerde köşegen sayısı: $K = \frac{n(n-3)}{2}$ (Denklemde K köşegen sayısını, n kenar sayısını göstermektedir.)

(3) Düzlem kapalı şekillerde iç açıların toplamı: A = (n – 2) 180 (Denklemde A iç açılar toplamını, n kenar sayısını göstermektedir.)

Matematik ve Bilim

Matematiği de içine alan tüm araştırma alanlarında elde edilen bulgular, ulaşılan sonuçlar önermelerde dile getirilir. Bu önermeler, aynı zamanda, ilişkin oldukları alanın konusunu belirler. Örneğin, fiziğin konusunu maddesel parçacıkların kütle, devinim ve enerji gibi özellikleri, bunlar arasındaki ilişkiler; psikolojinin konusunu insan (kimi zaman tüm canlı organizmaların) davranışları oluşturmaktadır. Matematiği tanımlarken sayı, nokta, küme gibi soyut nesnelerden söz ettik. Görülüyor ki, her bilim alanı öncelikle inceleme konusuyla kimlik kazanmaktadır. Ancak konu yönünden alanlar arasında gördüğümüz farkların niteliği değişiktir. Fizik ile psikolojiyi alalım. Biri maddesel parçacıkların kütle, devinim, vb. özelliklerini, öbürü insan davranışlarını inceleyen, birbirinden tümüyle ayrı iki bilim dalı. Ancak ikisini de matematikten ayıran ortak bir yanları var: Olgusal içerikli olmaları. Fizik de, psikoloji de, konu yönünden tüm farklarına karşın olgusal bilimlerdir. Oysa matematiği olgusal bilim olarak niteleyemeyiz. Matematiğin uğraş konusu nesneler olgusal değil, kavramsaldır. Sayıları, örneğin, ağaç, taş, bulut, yıldız gibi doğada bulduğumuz nesnelerden sayabilir miyiz? Doğada sayılar değil, olsa olsa sayılabilir nesneler vardır. Sayma bu tür nesneler üzerinde yürütülen bir işlem, bir belirlemedir. Sayılar doğada gözlemlenen nesne ya da olguların adı değil, sayma sürecinde zihnimizde oluşan kavramlardır. Öyleyse, matematiği konusu açısından empirik (olgusal) bilimlerle değil, tanımsal ya da biçimsel (formel) bir disiplin olan mantıkla birlikte sınıflamak daha uygun olur.(1)

Matematik yöntem ve sonuçları bakımından da olgusal bilimlere değil, mantığa yakındır. Empirik bilimler inceleme konusu olguları ve olgusal ilişkileri betimleme ve açıklama yoluna gider; gözlem, deney ve ölçme gibi işlemler olguları saptama ve betimleme araçlarını oluşturmakta; teori ya da hipotezler (açıklayıcı ge-

(1) Bu ayırımı değişik açılardan gereğinden fazla keskin bulan J. S. Mill ve W. V. O. Quine'ın görüşlerine ilerde değineceğiz. Bkz. VI. Bölüm, s. 72.

nellemeler) kurup test etme ise olguları açıklama yöntemini sağlamaktadır.

Her bilim kendi alanındaki olguları en doyurucu biçimde açıklama gücü taşıyan teori ya da teoriler kurma ve doğrulama çabası içindedir. Matematikte durum oldukça farklıdır. Burada gözlemsel olguları açıklama yerine, "algılanan" ilişkileri teorem olarak ispatlama çabası vardır.(1) Örneğin, düzlem geometride üçgenlerin iç açılarının toplamına ilişkin teoremi alalım: Tüm üçgenlerde iç açıların toplamı iki dik açının toplamına (yani, 180^{o}'ye) eşittir. Kuşkusuz başlangıçta bu, üçgenler üzerindeki ölçmelere dayanan bir tür gözlemsel diyebileceğimiz bir genellemeydi. Bir kez, matematikçi bu genellemeyi daha çok çeşit ve sayıda üçgenleri yoklayarak doğrulama yoluna gitmez, ya da bu kadarıyla yetinmez. Sonra, üçgenlerin iç açılarının toplamının neden iki dik açının toplamına eşit olduğu matematikçiyi uğraştırmaz: Onun aradığı açıklama değildir. O, önceden doğru kabul ettiği kimi ilke ya da varsayımlara başvurarak bulduğu ilişkiyi ispatlama yoluna gider. Algılanan bir ilişkinin, daha doğrusu o ilişkiyi dile getiren genellemenin teorem niteliği kazanması söz konusudur. Bu ise genellemenin ispatını gerektirir. Matematikçi şu ya da bu şekilde algıladığı ilişkiyi ilginç bulursa, onu açıklamayı değil, mantıksal kesinliğe kavuşturmayı amaçlar. Başka bir deyişle, ispatın amacı teoremdir, yoksa ispatın öncüllerini oluşturan varsayım (aksiyom ya da postulat)'ların doğrulanması değildir. Oysa, olgusal bilimlerde gözlem konusu bir ilişkiyi ispat değil, açıklama söz konusudur. Bilimsel açıklama öncelikle öncüllerin (özellikle kuramsal nitelikteki açıklayıcı genellemelerin) doğrulanmasına yöneliktir.

Ulaşılan sonuçlar açısından bakıldığında, matematik ile empirik bilimler arasında gene temel bir fark göze çarpmaktadır. İki alanda da ulaşılan sonuçlar önermelerde dile getirildiğinden, fark matematiksel bir önerme ile fizikten alınan bir önerme karşılaştırıldığında ortaya çıkacaktır:

---

(1) Buradaki "algılama" duyumsal olmaktan çok zihinsel diyebileceğimiz bir algılamadır.

Fizikten bir önerme:	Bir gazın hacmi, sıcaklık sabit tutulduğunda, basıncı ile ters orantılıdır.
Matematikten bir önerme:	3 + 4 = 7

Örnek aldığımız iki önermenin de doğru olduğunu biliyoruz. Ancak bu aynı anlamda bir "doğruluk" değildir. Birinci önerme olgusal bir ilişkiyi, gazların hacmi ile basıncı arasında deneysel yoldan belirlenen bir ilişkiyi dile getirmektedir. Doğruluğu olgusaldır. Bilim adamı bu tür önermelerin doğruluğunu gözlem ya da deneye başvurarak belirler.

İkinci önermeye gelince farklı bir durumla karşılaşmaktayız. Burada gene bir ilişki, iki sayı grubu arasında bir eşitlik ilişkisi dile getirilmektedir. İlk bakışta bu ilişkinin de gözleme dayalı bir genelleme olduğu sanılabilir. Gerçekten, 3 elma ile 4 elmanın bir arada 7 elma oluşturduğunu görmekteyiz. Elma yerine başka nesneler (örneğin, kalem, parmak, bilye, masa, yumurta, vb.) koysak, hep aynı sonuç ortaya çıkar. Ancak, matematiksel doğruluğun, olgusal doğruluğun tersine, gözlem ya da deneye bağlı olmadığını gösterebiliriz. Örneğin, mikroskop altına önce 3, sonra 4 mikrop koyalım: Saydığımızda birlikte 7 değil 8 mikrop bulduğumuzu bir an düşünelim. Şimdi beklentimize ters düşen bu gözleme dayanarak 3 + 4 = 7 önermesini yanlış sayabilir miyiz? Önerme olgusal nitelikte olsaydı, yanıtımız "evet" olacaktı. Nitekim herhangi bir gazın hacmi ile basıncı arasında beklentiye ters düşen tek bir gözlem, o ilişkiyi dile getiren genellemeyi yanlışlamaya yeter. Oysa gözlem sonucu ne olursa olsun, 3 + 4 = 7 önermesini yanlışlama olanağı yoktur; hatta gözlemlediğimiz nesneler mikrop değil, elma, kalem, yumurta türünden elle tutulur nesneler olsa, gene de, matematiksel önermeyi yanlış sayamayız: Hatayı önermede değil, sayma işlemimizde ararız, ya da başka türlü açıklamaya çalışırız.

Bu farka ilişkin çeşitli görüş ve tartışmaların ayrıntılarını şimdilik bir yana bırakıp temel görüş ayrılıklarına kısaca değinelim:

Günümüzde oldukça yaygın olan mantıksal empirist görüşe göre, matematiksel önermeler analitik ya da totolojik nitelik-